## Тема 1.6. Одномерная оптимизация

### 1.6.1. Постановка задачи

### 1.6.2. Метод дихотомии

### 1.6.3. Метод золотого сечения

### 1.6.4. Сравнение методов

### 1.6.5. Тестовые задания по теме «Одномерная оптимизация»

### **1.6.1. Постановка задачи**

Задача оптимизации – одна из важнейших составляющих многих инженерных задач. Найти оптимальное решение – означает найти наилучший, в смысле заданного критерия, вариант из всех возможных. При решении задачи оптимизации рассматривается некоторая функция, называемая **целевой** (или **критериальной**), и аргументы (**параметры целевой функции**), называемые **параметрами оптимизации**.

По количеству независимых переменных различают задачи одномерной оптимизации (**n=1**) и многомерной оптимизации (**n ≥ 2**). При этом задача нахождения максимума целевой функции сводится к задаче нахождения минимума путем замены функции **f(x)** на **-f(x)**, поэтому в дальнейшем будем говорить только о поиске минимума функции, то есть такого **x\*∈[a, b],** при котором **f(x\*) = min f(x).**

В области допустимых значений функция **f(x)** может иметь несколько экстремумов (минимумов или максимумов - рис. 4.6.1). Говорят, что функция **f(x)** имеет в точке **x\*** **локальный** минимум, если существует некоторая положительная величина **δ**, такая, что если **⏐х – х\*⏐< δ,** то **f(x)≥ f(x\*),** т.е. существует **δ** - окрестность точки **х\*,** такая, что для всех значений **х** в этой окрестности **f(x)≥ f(x\*).** Функция **f(x)** имеет **глобальный** минимум в точке **x\*,** если для всех **х** справедливо неравенство **f(x)≥ f(x\*)**. Таким образом, глобальный минимум является наименьшим из локальных.



Рис. 1.6.1-1

Задачей одномерной оптимизации является нахождение точек локального минимума и соответствующих им значений функции, а в некоторых случаях требуется вычислить глобальный минимум. Однако, во всех случаях эта задача сводится к задаче нахождения локального минимума.

Интервал, на котором локализован единственный минимум, называется **отрезком неопределенности*.***

Известно, что **необходимым** условием существования экстремума дифференцируемой функции **f(x)** является выполнение равенства **f′(х) = 0**. Точка **х**, удовлетворяющая данному условию, называется **точкой стационарности**. **Достаточным**условием существования минимума в точке стационарности является выполнение неравенства **f′′(х)>0**, а максимума - **f′′(х)<0**.

Задача одномерной оптимизации имеет единственное решение в том случае, если функция **f(x)** на отрезке **[a;b]** имеет только один экстремум. Тогда говорят, что функция **унимодальная** на отрезке **[a;b].**

**Достаточными**условиями унимодальности функции на отрезке **[a;b]** являются:

1. Длядифференцируемой функции **f(x)** ее производная **f′(х) -**  неубывающая.
2. Для дважды дифференцируемой функции **f(x)** выполняется неравенство **f′′(х)≥0**.

Все численные методы одномерной оптимизации применяются только для унимодальных на определенном интервале функций.

**Пример 1.6.1-1. Провести исследование функции f(x) = x3 – x + e-x на предмет существования экстремумов.**

Вначале проведем графическое исследование. Построим график функции **f(x)** (рис. 1.6.1-2). Из графика видно, что **f(x)** имеет две точки минимума: **х1** и **х2**, причем точка **х1**– точка глобального минимума. Исходя из графика, можно принять следующие отрезки неопределенности: для точки **х1** - **[-4;-3],** а для точки **х2** - **[0;1].**



Рис. 1.6.1-2

Проверим достаточное условие существования минимума на выбранных отрезках:

f′(x) = 3x2 – 1 – e-x; f′′ (x) = 6x + e-x,

f′(0) < 0, f′(1) > 0, f′′ (x) > 0 для х∈[0;1],

f′(-4) < 0, f′(-3) > 0, f′′ (x) > 0 для х∈[-4;-3].

Условия существования минимума выполнены, поскольку **f′′(x) > 0** для всех **х∈[0;1]** и **х∈[-4;-3].** Следовательно, функция **f(x)** является унимодальной на выбранных отрезках.

На практике **численные методы одномерной оптимизации** применяют в следующих случаях:

* значения функции **f(x)** определены в ходе эксперимента;
* целевая функция очень сложна или не имеет непрерывных производных;
* классические методы поиска оптимального значения не применимы.

Суть методов **одномерного поиска** заключается в том, что на каждой итерации интервал неопределенности уменьшается и стягивается к точке минимума. Уменьшение отрезка происходит до тех пор, пока на некоторой **n-**й итерации отрезок неопределенности **[bn;an]** не станет соизмеримым с заданной погрешностью **ε**, то есть будет выполняться условие **|bn-an| < ε.** Тогда за точку минимума можно принять любую точку, принадлежащую этому отрезку, в частности, его середину.

Наиболее простым способом сужения интервала неопределенности является деление его на некоторое число равных частей с последующим вычислением значений целевой функции в точках разбиения. Очевидно, что за минимум принимают наименьшее из этих значений – это так называемый **метод сканирования**. На практике чаще применяют одну из основных модификаций метода – **метод прямого перебора с переменным шагом**. Суть его заключается в следующем. От начальной точки интервала неопределенности двигаются с начальным шагом до тех пор, пока функция в точках разбиения уменьшается (т.е. функция убывает). Если функция в очередной точке стала возрастать, то происходит сужение интервала неопределенности путем возврата от этой рассматриваемой (которая станет правой границей нового интервала) точки на два шага назад. Полученная таким образом точка будет левой границей нового отрезка. Новый отрезок вновь исследуют таким же образом, но уже с уменьшенным в два раза шагом. Процесс повторяется до момента достижения заданной точности минимума. Это весьма трудоемкий путь. Более эффективными являются **методы одномерного поиска** с другими способами выбора узлов и сужения интервалов неопределенности.

Рассмотрим, в частности, **метод дихотомии** и **метод золотого сечения**.

### **1.6.2. Метод дихотомии**

Пусть дана функция **f(x),** унимодальная на отрезке  **[a;b].** Обозначим **a0 = a** и **b0 = b**. Поиск минимума начинают с выбора на отрезке неопределенности **[a0;b0**] двух симметричных относительно середины точек:

 где **δ** - параметр метода.

Сравнивая вычисленные в точках **α1**и **β1** значения функций **f(α1)** и **f(β1),** в силу унимодальности функции можно провести сокращение отрезка неопределенности следующим образом:

1) если **f(α1) ≤ f(β1),** то **x\*∈[a0;β1]**  (Рис. 1.6.1-3.а);

2) если **f(α1) > f(β1),** то **x\*∈[α1;b0]** (Рис. 1.6.1-3.b).



а) b)

Рис. 1.6.1-3

Если описанную процедуру принять за одну итерацию, то алгоритм поиска минимума можно описать следующим образом. Опишем **k+1** итерацию, исходя из того, что **k**-й отрезок неопределенности найден **[ak;bk]:**

1. Вычисляются



1. Находят значения **f(αk+1) и f(βk+1).**
2. Находят **k+1**-й отрезок неопределенности по правилу:

если **f(αk+1) > f(βk+1),** то **x\* ∈[αk+1;bk],**

если **f(αk+1) ≤ f(βk+1),** то **x\*∈[ak;βk+1]).**

Вычисления проводятся до тех пор, пока не выполнится неравенство



где **Δn** – длина **n**-го отрезка неопределенности.

Заметим, что от итерации к итерации **Δn** убывает и при **n→∞** стремится к величине **2δ,** оставаясь больше этой величины. Поэтому добиться при некотором значении **n** длины отрезка неопределенности | меньше заданной точности можно лишь выбирая **0<δ<ε/2**.

Длину конечного интервала неопределенности, обеспечивающего заданную величину **ε**, можно вычислить по формуле



Положив **Δn = ε,** можно определить соответствующее количество итераций:



Схема алгоритма метода дихотомии приведена на рис. 1.6.1-4.

|  |
| --- |
|  |

Рис.1.6.1-4. Схема алгоритма поиска минимума методом дихотомии

**Пример 1.6.2-1. Найти минимум функции f(x)=x3-x+e-х на отрезке [0;1] c точностью ε и вычислить количество итераций, требуемое для обеспечения точности.**

Выберем δ =0.001 и положим a = 0; b = 1; 



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **a** | **b** | **a1** | **b1** | **f(a1)** | **f(b1)** | **Δn** |
| **1** | 0 | 1 | 0.499 | 0.501 | 0.23239 | 0.23067 | 0.501 |
| **2** | 0.499 | 1 | 0.7485 | 0.7505 | 0.14392 | 0.14435 | 0.2515 |
| **3** | 0.499 | 0.7505 | 0.62375 | 0.6257 | 0.15486 | 0.15413 | 0.12675 |
| **4** | 0.62375 | 0.7505 | 0.68613 | 0.6881 | 0.14040 | 0.14023 | 0.06437 |
| **…** | ….. | ….. | ….. | …. | ….. | ….. | …. |
| **7** | 0.701719 | 0.71931 | 0.70951 | 0.7115 | 0.13954 | 0.13959 | 0.00979 |

При ε = 0.1 x\*=0.7183 f(x\*)=0.1399, а при ε = 0.01 x\*=0.7066 f(x\*)=0.13951.



### **1.6.3. Метод золотого сечения**

В основу метода положено разбиение отрезка неопределенности **[a;b]** в соотношении золотого сечения, такого, что отношение длины его большей части ко всей длине отрезка равно отношению длины его меньшей части к длине его большей части:

***l***

*l2* *l1*



Положим **l =1**, тогда **l22= 1 - l2 ,** а **l22 + l2 -1= 0,**откуда



где **k1, k2** - коэффициенты золотого сечения.

В методе **золотого сечения** каждая точка **(х1 и х2**)осуществляет золотое сечение отрезка (рис. 1.6.3-1).



Рис. 1.6.3-1



 или 

Нетрудно проверить, что точка **х1** осуществляет золотое сечение не только отрезка **[a;b]**, но и отрезка **[a;х2]**. Точно так же точка **х2**осуществляет золотое сечение не только отрезка **[a;b]**, но и отрезка **[х1;b].** Это приводит к тому, что значение целевой функции на каждой итерации (кроме первой) вычисляется один раз.

После каждой итерации длина отрезка неопределенности сокращается в **1.618** раза. Длина конечного отрезка неопределенности **Δn = 0.618nΔ0,** где **Δ0= (b-a)** – начальная длина отрезка.

Условие окончания процесса итераций **Δn  ε.** Отсюда можно найти количество итераций, необходимое для достижения точки минимума:

 отсюда  логарифмируя, получим

****

Схема алгоритма метода золотого сечения приведена на рис. 1.6.3-2.

**Пример 1.6.3-1. Пусть минимум функции f(x) = x3 – x + e-x отделен на отрезке [0;1]. Определить количества итераций и конечные длины отрезков неопределенности, необходимые для достижения заданных точностей ε=0.1 и ε=0.01.**





|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | **a** | **b** | **x1** | **x2** | **f(x1)** | **f(x2)** | **Δn** |
| **1** | 0 | 1 | 0.38196 | 0.61803 | 0.35628 | 0.15704 | 0.61803 |
| **2** | 0.38196 | 1 | 0.61803 | 0.76393 | 0.15704 | 0.14772 | 0.382 |
| **3** | 0.61803 | 1 | 0.76393 | 0.85410 | 0.14772 | 0.19462 | 0.236 |
| **4** | 0.61803 | 0.85410 | 0.70820 | 0.76393 | 0.13953 | 0.14772 | 0.146 |
| **5** | 0.61803 | 0.76393 | 0.67376 | 0.70820 | 0.14188 | 0.13953 | 0.090 |

При ε = 0.1 x\*=0.718847, f(x\*)=0.139925.

При ε = 0.01 x\*=0.704139, f(x\*)=0.139516.

|  |
| --- |
|  |

1.6.3-2. Схема алгоритма поиска минимума методом золотого сечения

### **1.6.4. Сравнение методов**

Накаждойитерации при использовании метода **дихотомии** отрезок неопределенности сокращается практически в два раза, а при использовании метода золотого сечения в **1.618** раз.

Конечная длина отрезка неопределенности при использовании метода дихотомии , а при использовании метода золотого сечения - , поэтому для обеспечения одного и того же значения погрешности методом дихотомии требуется произвести меньше итераций, чем при использовании метода золотого сечения.

На каждой итерации в методе дихотомии целевая функция вычисляется два раза, а в методе золотого сечения только один раз, следовательно, метод золотого сечения менее трудоемок с точки зрения вычислений.

### **1.6.6. Тестовые задания по теме «Одномерная оптимизация»**

1. **Оптимальное значение функции** – **это**
   * + 1. наилучшее
       2. наименьшее
       3. наибольшее
       4. в списке нет правильного ответа
2. **Локальный минимум** – **это**
   * + 1. один из минимумов функции в области допустимых значений
       2. наименьшее значение функции в некоторой окрестности
       3. наименьший из минимумов в области допустимых значений
       4. в списке нет правильного ответа
3. **Глобальный минимум** – **это**
   * + 1. один из минимумов функции в области допустимых значений
       2. наименьшее значение функции в некоторой окрестности
       3. наименьший из минимумов в области допустимых значений
       4. в списке нет правильного ответа
4. **Глобальный минимум является**
   * + 1. наибольшим из локальных
       2. первым по порядку из локальных
       3. в списке нет правильного ответа
       4. наименьшим из локальных
5. **Необходимым условием существования минимума функции F(x) на отрезке [a;b] является**
   * + 1. 
       2. 
       3. 
       4. в списке нет правильного ответа
6. **В методах одномерной оптимизации при переходе к следующей итерации часть отрезка [a;b] можно отбросить, потому что**
7. в отброшенной части функция уменьшается
8. на отрезке [a;b] целевая функция унимодальная
9. отбрасывается часть отрезка, содержащего большие значения функции
10. производная монотонно возрастает
11. **Методом оптимизации можно найти глобальный минимум, если**
12. на отрезке только один минимум
13. применять метод прямого перебора
14. глобальный минимум совпадает с локальным
15. в списке нет правильного ответа
16. **Вид функции на скорость сходимости метода дихотомии**
17. влияет, чем круче функция, тем быстрее сходимость
18. для пологих функций сходимость ниже
19. в списке нет правильного ответа
20. не влияет
21. **Основное достоинство метода золотого сечения**
22. на каждой итерации значение целевой функции вычисляется только один раз
23. на каждой итерации отрезок неопределенности уменьшается в 1.68 раза
24. значение минимума функции находится за конечное количество итераций
25. в списке нет правильного ответа
26. **Суть методов одномерной оптимизации заключается**
27. в том, что на каждой итерации отрезок неопределенности уменьшается и стягивается к точке минимума
28. в получении экстремального значения функции
29. в увеличении отрезка неопределенности
30. в списке нет правильного ответа
31. **В методе золотого сечения на каждой итерации длина отрезка неопределенности [a;b]уменьшается**
32. на 0.618(b – a)
33. в 1.618 раз
34. на 0.5(b – a)
35. в 0.618 раз
36. **Длина отрезка неопределенности [a;b]на следующей итерации в методе дихотомии составляет**
37. 0.618(b – a)
38. 0.382(b – a)
39. 0.5(b – a)
40. 0.2(b – a)
41. **Группа методов, в которых точка минимума (максимума) функции находится путем получения вложенных отрезков, называется**
42. методы спуска
43. градиентные методы
44. методы одномерного поиска
45. в списке нет правильного ответа
46. **Золотым сечением называется такое деление отрезка на две неравные части, при котором**
47. отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части отрезка к длине его меньшей части
48. отношение длины всего отрезка к длине его меньшей части равно отношению длины большей части отрезка к длине его меньшей части
49. отношение длины всего отрезка к длине его большей части не равно отношению длины большей части отрезка к длине его меньшей части
50. нет верного ответа
51. **Метод оптимизации, при котором на каждой итерации вычисляется только одно значение целевой функции, это**
52. метод дихотомии
53. метод золотого сечения
54. метод Ньютона
55. все перечисленные методы
56. в списке нет правильного ответа
57. **Функция на отрезке [1;5] имеет**
58. единственный минимум
59. единственный максимум
60. не имеет точек экстремума
61. минимум и максимум
62. **Функция на отрезке [0;4] имеет**
63. единственный максимум
64. минимум и максимум
65. не имеет точек экстремума
66. единственный минимум
67. **Функция на отрезке [-1;4] имеет**
68. единственный максимум
69. единственный минимум
70. минимум и максимум
71. не имеет точек экстремума
72. **Функция на отрезке [-2;2] имеет**
73. единственный минимум
74. единственный максимум
75. минимум и максимум
76. не имеет точек экстремума
77. **Функция на отрезке [-4;-1] имеет**
78. единственный максимум
79. минимум и максимум
80. не имеет точек экстремума
81. единственный минимум
82. **Значения точек  и , вычисленные по методу золотого сечения на первой итерации, при поиске минимума функции на отрезке неопределенности [5;5.5] равны**
83. x1 = 5.260, x2 = 5.240
84. x1 = 5.447, x2 = 5.353
85. x1 = 5.147, x2 = 5.053
86. x1 = 5.309, x2 = 5.191
87. **Значения точек  и , вычисленные по методу дихотомии на первой итерации, при поиске минимума функции на отрезке неопределенности [-1;0] () равны**
88. x1 = -0.49, x2 = -0.51
89. x1 = -0.48, x2 = -0.52
90. x1 = -0.38, x2 = -0.62
91. x1 = 0.49, x2 = 0.51
92. **Значения точек  и , вычисленные по методу золотого сечения на первой итерации, при поиске минимума функции на отрезке неопределенности [10;12] равны**
93. x1 = 11.236, x2 = 10.764
94. x1 = 11.364, x2 = 10.636
95. x1 = 11.011, x2 = 10.099
96. x1 = 11.005, x2 = 10.995
97. **Значения точек  и , вычисленные по методу дихотомии на первой итерации, при поиске минимума функции на отрезке неопределенности [-2;-1.5] () равны**
98. x1 = -1.69, x2 = -1.81
99. x1 = -1.74, x2 = -1.76
100. x1 = -1.73, x2 = -1.77
101. x1 = -1.59, x2 = -1.61
102. **Значения точек  и , вычисленные по методу золотого сечения на первой итерации, при поиске минимума функции на отрезке неопределенности [1.5;2] равны**
103. x1 = 1.841, x2 = 1.659
104. x1 = 1.809, x2 = 1.691
105. x1 = 1.761, x2 = 1.749
106. x1 = 1.755, x2 = 1.745
107. **Границы отрезка неопределенности после 1-ой итерации по методу дихотомии (), для функции , если значение минимума отделено на отрезке [0;2], равны**
108. [0.99; 2]
109. [0; 1.236]
110. [0; 1.01]
111. [0.764; 2]
112. **Границы отрезка неопределенности после 1-ой итерации по методу золотого сечения, для функции , если значение максимума отделено на отрезке [-0.5;0.5], равны**
113. [-0.118; 0.5]
114. [-0.01; 0.5]
115. [-0.5; 0.118]
116. [-0.5; 0.01]